Aufgabe - Wirtschaftlichkeit Dämmung

Mit folgenden Ansätzen kann eine Gleichung für die spezifischen auf die Fläche bezogenen Gesamtkosten einer nachträglichen Außenwanddämmung (WD) aufgestellt werden:

- $A1 = I_{Do} \cdot a_D$
- $A2 = k_D \cdot a_D$
- $A3 = Gt \cdot p_E / \eta_{Ges}$

Hierin sind:

- I_{Do}: Grundkostenanteil der WD (Montage, Gerüst,...) = 37,5 €/m^2
- $a_D = a_{p,n} + a_I$
- $a_{p,n}$: Annuitätsfaktor (aus p = 7 %/a und n= 50 a)
- a_I: Aufwendungen für Instandhaltung: 1 %/a
- k_D: spez. Zusatzkosten des Wärmedämmstoffs: 1,25 € /(m² · $cm_{Dämmdicke}$)
- Gt: Gradtagsstunden: 80 k(ilo)Kh/a
- p_E: spez. Energiepreis = 0,05 €/kWh_{th}
- η_{Ges}: Gesamtnutzungsgrad der Anlage = 0.8

Die spezifischen flächenbezogenen Gesamtkosten ergeben sich zu:

$$\boxed{\mathbf{Kges(d) = A1 + A2 \cdot d - A3 \cdot \Delta k}}$$

Mit:

- d: Dämmdicke in cm
- $\Delta k = [1/R_1 - (R_1 + d/\lambda)^{-1}]$
- R_1: Wärmedurchgangswiderstand der alten Wand = 0,75 m^{2}K/W
- λ: Wärmeleitfähigkeit der Dämmung = 0,035 W/(m K)

a) Beweisen Sie, dass sich für den optimalen Durchmesser folgender Zusammenhang ergibt:

$$d_{opt} = (A3 \cdot \lambda / A2)^{1/2} – R1 \cdot \lambda$$

b) Bestimmen Sie die optimale Dämmdicke und runden Sie diese auf einen handelsüblichen Wert (6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 cm) auf.

c) Bestimmen Sie für die gewählte Dämmdicke die Jahresgesamtkosten in €/(m²a).

d) Wie verändert sich der Wert von d_{opt}, wenn
   1. der Betrachtungszeitraum verkürzt wird,
   2. der Kalkulationszins höher ist,
   3. der spez. Energiepreis niedriger liegt?

Lösung

a)

Umformen der Gleichung:

$$K = A1 + A2 \cdot d - A3 \cdot \left(\frac{1}{R1} - (R1 + d/\lambda)^{-1} \right)$$

$$= A1 + A2 \cdot d - \frac{A3}{R1} + A3 \cdot \left(R1 + \frac{1}{\lambda} \cdot d \right)^{-1}$$

Mathematisches Ableiten der Gleichung nach der gesuchten Größe d:

$$K' = 0 + A2 \cdot 1 - 0 + (-1) \cdot A3 \cdot \left(R1 + \frac{1}{\lambda} \cdot d \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= A2 - \frac{A3}{\lambda} \cdot \left(R1 + \frac{1}{\lambda} \cdot d \right)^{-2}$$

Gleichung zu null setzen und lösen, um das Optimum zu finden:

$$0 = A2 - \frac{A3}{\lambda} \cdot \left(R1 + \frac{1}{\lambda} \cdot d \right)^{-2}$$

$$\frac{\lambda \cdot A2}{A3} = \left(R1 + \frac{1}{\lambda} \cdot d \right)^{-2}$$

$$\frac{\lambda \cdot A2}{A3} = \frac{1}{(R1 + d/\lambda)^2}$$

$$(R1 + d/\lambda)^2 = \frac{A3}{\lambda \cdot A2}$$

$$R1 + d/\lambda = \sqrt{\frac{A3}{\lambda \cdot A2}}$$

$$d/\lambda = \sqrt{\frac{A3}{\lambda \cdot A2}} - R1$$

$$d = \lambda \cdot \left(\frac{A3}{\lambda \cdot A2} \right)^{1/2} - R1 \cdot \lambda$$

$$d = \left(\frac{\lambda \cdot A3}{A2} \right)^{1/2} - R1 \cdot \lambda$$ was zu beweisen war.

b)

Randdaten

$$a_{p,n} = \frac{p}{1-(1+p)^{-n}} = \frac{0{,}07}{1-1{,}07^{-50}} = 0{,}0725\frac{1}{a}$$

$$a_D = 0{,}0725\frac{1}{a} + 0{,}01\frac{1}{a} = 0{,}0825\frac{1}{a}$$

A2 und A3 berechnen

$$A2 = 1{,}25\frac{€}{m^2cm} \cdot 0{,}0825\frac{1}{a} \cdot 100\frac{cm}{m} = 10{,}313\frac{€}{m^3a}$$

$$A3 = \frac{80kKh/a \cdot 0{,}05€/kWh}{0{,}8} = 5\frac{K \cdot €}{a \cdot W}$$

Einsetzen und Gleichung lösen

$$A3 \cdot \lambda = 5\frac{K€}{aW} \cdot 0{,}035\frac{W}{mK} = 0{,}175\frac{€}{ma}$$

$$R1 \cdot \lambda = 0{,}75\frac{m^2K}{W} \cdot 0{,}035\frac{W}{mK} = 0{,}02625m$$

$$d = \left(\frac{0{,}175€/(ma)}{10{,}313€/(m^3a)}\right)^{1/2} - 0{,}02625m = 0{,}13m - 0{,}026m = 0{,}104m$$

Runden

d_{opt} = 0,12 m

c)

$$\Delta k = \frac{1}{R1} - \frac{1}{R1 + d/\lambda} = \frac{W}{0{,}75m^2K} - \frac{1}{0{,}75m^2K/W + 0{,}12/0{,}035m^2K/W} = 1{,}09\frac{W}{m^2K}$$

$$A1 = 37{,}5\frac{€}{m^2} \cdot 0{,}0825\frac{1}{a} = 3{,}09\frac{€}{m^2a}$$

$$K = 3{,}09\frac{€}{m^2a} + 0{,}12m \cdot 10{,}313\frac{€}{m^3a} - 5\frac{K€}{aW} \cdot 1{,}09\frac{W}{m^2K} = -1{,}12\frac{€}{m^2a}$$

d)

- n sinkt → $a_{p,n}$ wird größer → a_D wird größer → A2 wird größer → d_{opt} sinkt
- Zins steigt → $a_{p,n}$ wird größer → a_D wird größer → A2 wird größer → d_{opt} sinkt
- p sinkt → A3 wird kleiner → d_{opt} sinkt