Bernoulli - Gleichung

1. Bernoulli - Gleichung für ideale Flüssigkeiten (reibungsfrei) und ohne Energiezu- und -abfuhr

Sie sagt aus, dass jedes Teilchen in einer Stromröhre denselben Wert der spezifischen Gesamtenergie hat; oder: Die Gesamtenergie eines Teilchens auf seinem Weg in einer Stromröhre bleibt konstant. Die Gesamtenergie setzt sich aus den Anteilen potentielle Energie, kinetische Energie und Druckenergie zusammen. Durchläuft ein Teilchen eine Stromröhre, so ändern sich diese Anteile ständig, ihre Summe bleibt aber konstant.

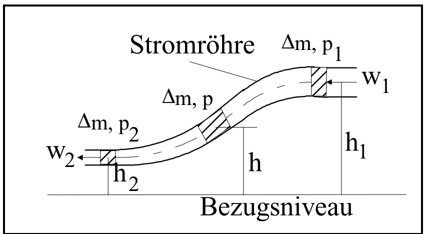

Bild 1: Darstellung der Bernoulligleichung

Einen Überblick über die drei Energiearten und ihre Berechnung gilt die folgende Aufstellung.

	für m kg, Nm	spezifische Energie für 1 kg; Nm/kg
potentielle Energie	$E_p = m \cdot g \cdot h$	$e_p = g \cdot h$
kinetische Energie	$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot w^2$	$e_k = \frac{1}{2} \cdot w^2$
Druckenergie	$W_p = \frac{m}{\rho} \cdot (p - p_0)$	$w_p = (p - p_0) / \rho$
Gesamtenergie	$E_g = E_p + E_k + W_p$	$e_g = e_p + e_k + w_p$

Tab. 1: Formeln zur Berechnung der Energiearten

Für ein Fluidteilchen der Masse m gilt für jeden Punkt der Stromlinie:

$$\underbrace{\frac{m \cdot w^2}{2}}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{Lageenergie}} + \underbrace{p \cdot \frac{m}{\rho}}_{\text{Druckenergie}} = \underbrace{E_{ges}}_{\text{Gesamtenergie}} = \text{konst.}$$

Für die mathematische Formulierung ist es unzweckmäßig von einem Teilchen mit bestimmter Masse m auszugehen; hier benützt man besser spezifische Energien. Man kann sich die Teilchen dabei beliebig klein vorstellen und die Bernoullische Gleichung letztlich auch auf eine Stromlinie beziehen (nicht auf eine Stromröhre).

Energiegleichung (Energie pro Masseneinheit)

$$\frac{w_1^{\,2}}{2} + g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{w_2^{\,2}}{2} + g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} = \text{konst.}$$

Einheiten:

$$\frac{m^2}{s^2} = \frac{m \cdot m}{s^2} = \frac{N\,m^3}{m^2\,kg} = \frac{N\,m}{kg} \cdot \frac{kg\,m}{N\,s^2}$$

Dies ist die Bernoullische Gleichung für stationäre Strömung. Man erkennt sogleich, dass diese Gleichung gültig bleibt, wenn man das Bezugsniveau für die Höhe h ändert und auch wenn man den Bezugsdruck, von dem weg man p misst, ändert. Es werden dann rechts und links nur gleich große Summanden hinzuaddiert; die Konstante ändert sich zwar, aber die Gleichung bleibt gültig.

Bezieht man die Energien auf m = 1 kg und dividiert durch die Fallbeschleunigung g so werden sie Energieverhältnisse durch Höhen ausgedrückt.

Höhengleichung (Energie pro Gewichtseinheit)

$$\frac{w_1^{\,2}}{2 \cdot g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{w_2^{\,2}}{2 \cdot g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} = \text{konst.}$$

Einheiten:

$$\frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{s^2}{m} = m = \frac{N\,m^3 s^2}{m^2\,kg\,m} = \frac{N\,s^2}{kg} \cdot \frac{kg\,m}{N\,s^2}$$

Schließlich kann die Bernoullische Gleichung auch noch in der Druckform angeschrieben werden.

Druckgleichung

$$\frac{\rho \cdot w_1^{\,2}}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho \cdot w_2^{\,2}}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 = \text{konst.}$$

Einheiten:

$$\frac{kg\,m^2}{m^3\,s^2} \cdot \frac{N\,s^2}{kg\,m} = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \cdot \frac{N\,s^2}{kg\,m}$$

- $p_1 = p_{st1}$ = statischer Druck
- $\frac{\rho \cdot w_1^{\,2}}{2} = p_{dyn1}$ = dynamischer Druck (Staudruck)
- $p_1 + \frac{\rho \cdot w_1^{\,2}}{2} = p_{ges}$ = Gesamtdruck

Verschiedene Formen der Bernoullischen Gleichung (reibungsfrei)

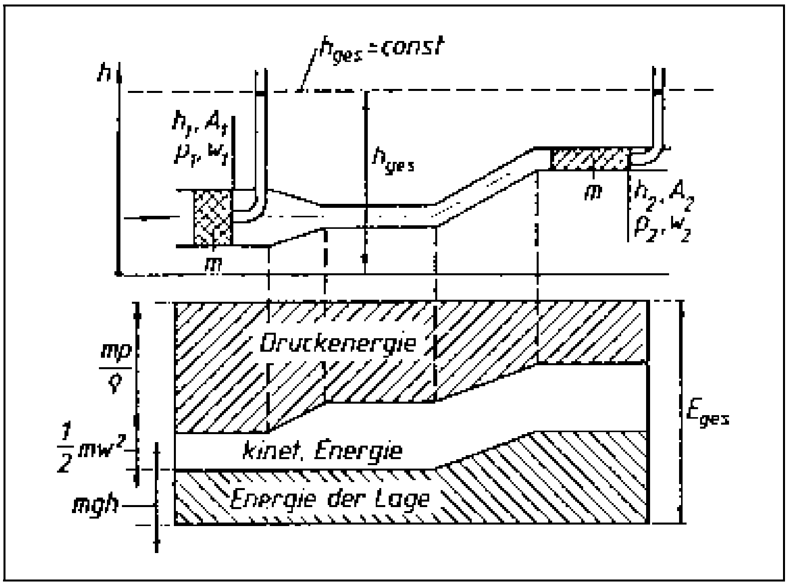

Bild 2: Verschiedene Formen der Bernoullischen Gleichung

Dynamischer Anteil		Geodätischer Anteil		Statischer Anteil		Gesamt			Einheit
Energiegleichung $\frac{w^2}{2}$	+	$g \cdot h$	+	$\frac{p}{\rho}$	=	e_{ges}	=	konst.	$\frac{Nm}{kg}, \frac{m^2}{s^2}$
Druckgleichung $\rho \cdot \frac{w^2}{2}$	+	$\rho \cdot g \cdot h$	+	p	=	p_{ges}	=	konst.	$\frac{N}{m^2}$
Höhengleichung $\frac{w^2}{2 \cdot g}$	+	h	+	$\frac{p}{\rho \cdot g}$	=	h_{ges}	=	konst.	m

Tab. 2: Verschiedene Formen der Bernoullischen Gleichung

2. Bernoulli-Gleichung für wirkliche Flüssigkeiten (Reibungsverluste) und Energiezufuhr durch Pumpe

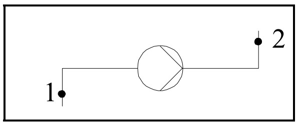

Bild 3: Schema

Heizungsanlagen enthalten meist Pumpen, die die Arbeitsfähigkeit des strömenden Mediums erhöhen. Diese Zufuhr von Arbeit wird in der erweiterten Bernoullischen Gleichung durch ein Arbeitsglied berücksichtigt.

Weiterhin ist die Strömung eines realen Fluids infolge Zähigkeit und Haftens an der Oberfläche mit Arbeitsverlusten verbunden. Die Berücksichtigung dieses Verlustes an Arbeitsfähigkeit erfolgt nun in der Bernoullischen Gleichung durch ein Verlustglied. Die mechanische Energie des strömenden Teilchens (kinetische + potentielle + Druckenergie) ist nicht mehr konstant. Es ist daher auch der Gesamtdruck p_{ges} und die Gesamthöhe h_{ges} (auch ohne äußere Zu- oder Abfuhr von Arbeit E_a) nicht mehr konstant; der fehlende Anteil erscheint als Reibungswärme.

Während jedem Querschnitt des Rohres die Größen w, h, p eindeutig zugeordnet werden können, müssen die Energiezufuhr und die Energieverluste einer Rohrstrecke zwischen zwei Querschnitten zugeordnet werden. Bei der Ergänzung der Bernoullischen Gleichung fügt man das Arbeitsglied („+“ für Arbeitszufuhr) zu den Gliedern mit dem Index „1“ und das Verlustglied (nur positive Werte!) zu den Gliedern mit dem Index „2“ hinzu. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Strömung von „1“ nach „2“ erfolgt. Somit lautet die erweiterte Bernoullische Gleichung

Energie pro Volumeneinheit

$$\rho \cdot g \cdot h_1 + p_1 + \frac{\rho \cdot {w_1}^2}{2} + \Delta p_P = \rho \cdot g \cdot h_2 + p_2 + \frac{\rho \cdot {w_2}^2}{2} + \Delta p_{v1-2}$$

mit:
- Δp_P Druckerhöhung in der Pumpe (Energiezufuhr in der Pumpe pro Volumeneinheit)
- Δp_{v1-2}, Druckverlust von 1 nach 2

Energie pro Gewichtseinheit

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{w_1}^2}{2 \cdot g} + H_P = h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{w_2}^2}{2 \cdot g} + H_{v1-2}$$

mit:
- $H_P = \frac{\Delta p_P}{\rho \cdot g}$ Förderhöhe der Pumpe [m Fl.S]
- $H_{v1-2} = \frac{\Delta p_{v1-2}}{\rho \cdot g}$ Druckverlusthöhe von 1 nach 2

Energie pro Masseneinheit

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^{\;2}}{2} + Y_P = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^{\;2}}{2} + \frac{\Delta p_{v1-2}}{\rho}$$

$$Y_P = g \cdot H_P = \frac{\Delta p_P}{\rho} = W_{tP}$$

= spezifische technische Arbeit, die in der Pumpe der Flüssigkeit zugeführt wird.
= spezifische Förderarbeit oder Stutzenarbeit [Nm/kg = m²/s²]

Der Zuwachs an mechanischer Leistung im Fluid am Pumpenaustritt gegenüber dem Pumpeneintritt wird als hydraulische Leistung P_h bezeichnet. Hierfür ergibt sich:

$$P_h = \dot{m} \cdot Y_P = \dot{V} \cdot \rho \cdot Y_P = \dot{V} \cdot \rho \cdot g \cdot H_P = \dot{V} \cdot \Delta p_P$$

Anmerkung:

m Fl.S. (m Flüssigkeitssäule) bezieht sich auf die Flüssigkeit, die im System strömt
m WS (m Wassersäule, früher Druckbegriff) bezieht sich immer auf ρ = 1000 kg/m³

Zusammenhang:

$$g \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot h[mWS] = g \cdot \rho_{Fl} \cdot h[mFl.S.]$$

$$h[mWS] = \frac{\rho_{Fl}}{1000 \frac{kg}{m^3}} \cdot h[mFl.S.]$$

$$h[mFl.S.] = \frac{1000 \frac{kg}{m^3}}{\rho_{Fl}} \cdot h[mWS]$$

Bernoulli-Gleichung für wirkliche Flüssigkeiten und Energiezufuhr durch eine Pumpe

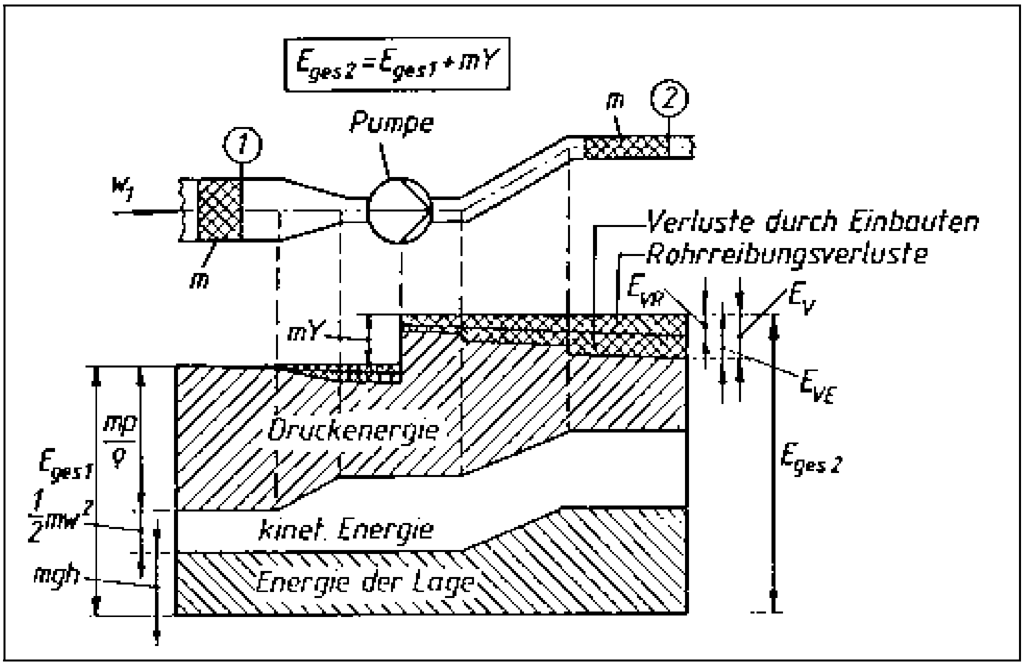

Bild 4: Bernoullische Gleichung für wirkliche Flüssigkeiten

	Einheiten
Energiegleichung $\frac{w_1^2}{2} + g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + Y_P = \frac{w_2^2}{2} + g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\Delta p_{v1-2}}{\rho}$	Einheiten $\frac{N\,m}{kg}; \frac{m^2}{s^2}$
Höhengleichung $\frac{w_1^2}{2 \cdot g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + H_P = \frac{w_2^2}{2 \cdot g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + H_{v1-2}$	m
Druckgleichung $\frac{\rho \cdot w_1^2}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \Delta p_P = \frac{\rho \cdot w_2^2}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \Delta p_{v1-2}$	Pa

Tab. 3: Bernoullische Gleichung für wirkliche Flüssigkeiten

Quelle: Datenpool IfHK, FH Wolfenbüttel