

Teillastverhalten von Heizkörpern

Die Heizung eines Hauses wird durch zentrale Vorlauftemperaturregelung nach der Außentemperatur den Außenverhältnissen angepaßt. Dabei ist die Regelung so eingestellt, daß die Temperatur im Wohnzimmer immer 20 °C beträgt.

Auslegungsdaten : $t_{V,A}/t_{R,A}/t_{a,A} = 70/55/-15$ °C, Normradiatoren

a.) Welche Raumtemperatur stellt sich bei $t_a = 5$ °C in den Räumen ein, deren Heizkörper so bemessen sind, daß gilt:

$$\text{Raum 1 : } t_{V,A}/t_{R,A}/t_{a,A} / t_{L,A} = 70/55/-15/15 \text{ °C}$$

$$\text{Raum 2 : } t_{V,A}/t_{R,A}/t_{a,A} / t_{L,A} = 70/55/-15/24 \text{ °C}$$

b.) Bei welcher Außentemperatur herrscht in dem Raum 2 eine Raumtemperatur von $t_L = 23$ °C ?

Lösung a) Berechnung der Vorlauftemperatur bei $t_a = 5$ °C und $t_L = 20$ °C

erste und dritte Heizkörpergleichung:

$$\textcircled{3} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{20^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C}}{20^\circ\text{C} - (-15)^\circ\text{C}} = \frac{15\text{K}}{35\text{K}} = \frac{3}{7} = 0,4286$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{t_V - t_R}{(70 - 55)\text{K}} = \frac{t_V - t_R}{15\text{K}}$$

$\textcircled{1}$ und $\textcircled{3}$ gleichsetzen:

$$\frac{15\text{K}}{35\text{K}} = \frac{t_V - t_R}{15\text{K}} \quad t_V - t_R = \frac{15 \cdot 15}{35} \text{K} = \frac{45}{7} \text{K} = 6,43\text{K} \quad t_R = t_V - 6,43\text{K}$$

logarithmische Übertemperatur im Auslegungsfall:

$$\Delta t_{mA} = \frac{t_{VA} - t_{RA}}{\ln \frac{t_{VA} - t_{iA}}{t_{RA} - t_{iA}}} = \frac{70^\circ\text{C} - 55^\circ\text{C}}{\ln \frac{70^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}}{55^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}}} = 42,06\text{K}$$

zweite Heizkörpergleichung:

$$\textcircled{2} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \left(\frac{t_V - t_R}{\ln \frac{t_V - t_i}{t_R - t_i}} \right)^n = \left(\frac{t_V - t_R}{\ln \frac{t_V - 20^\circ\text{C}}{t_R - 20^\circ\text{C}}} \right)^{1,3} = \left(\frac{6,43\text{K}}{42,06\text{K} \cdot \ln \frac{t_V - 20^\circ\text{C}}{t_V - 26,43\text{K}}} \right)^{1,3} = \frac{3}{7}$$

Umstellen:

$$\ln \frac{t_V - 20^\circ\text{C}}{t_V - 26,43\text{K}} = \frac{6,43\text{K}}{42,06\text{K} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{1,3}} = 0,2934$$

$$\frac{t_V - 20^\circ\text{C}}{t_V - 26,43\text{K}} = e^{0,2934} = 1,3409$$

$$t_V - 20^\circ\text{C} = 1,3409 \cdot (t_V - 26,43\text{K})$$

$$t_V = 45,29^\circ\text{C}$$

Berechnung der Raumtemperatur für $t_{iA} = 15^\circ\text{C}$ und der ermittelten Vorlauftemperatur von $45,29^\circ\text{C}$

erste und dritte Heizkörpergleichung:

$$\textcircled{3} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{t_i - 5^\circ\text{C}}{15^\circ\text{C} - (-15)^\circ\text{C}} = \frac{t_i - 5^\circ\text{C}}{30^\circ\text{C}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{45,29^\circ\text{C} - t_R}{(70 - 55)\text{K}} = \frac{45,29^\circ\text{C} - t_R}{15\text{K}}$$

$\textcircled{1}$ und $\textcircled{3}$ gleichsetzen:

$$\frac{t_i - 5^\circ\text{C}}{30^\circ\text{C}} = \frac{45,29^\circ\text{C} - t_R}{15\text{K}} \quad t_R = 45,29^\circ\text{C} - \frac{15\text{K} \cdot (t_i - 5^\circ\text{C})}{30^\circ\text{C}} \quad t_R = 47,79^\circ\text{C} - 0,5 \cdot t_i$$

logarithmische Übertemperatur im Auslegungsfall:

$$\Delta t_{\text{mA}} = \frac{t_{\text{VA}} - t_{\text{RA}}}{\ln \frac{t_{\text{VA}} - t_{iA}}{t_{\text{RA}} - t_{iA}}} = \frac{70^\circ\text{C} - 55^\circ\text{C}}{\ln \frac{70^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}}{55^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}}} = 47,10\text{K}$$

zweite Heizkörpergleichung:

$$\textcircled{2} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{t_i - 5^\circ\text{C}}{30^\circ\text{C}} = \left(\frac{45,29^\circ\text{C} - (47,79^\circ\text{C} - 0,5 \cdot t_i)}{\ln \frac{45,29^\circ\text{C} - t_i}{47,79^\circ\text{C} - 0,5 \cdot t_i - t_i}} \right)^{1,3}$$

$$\frac{t_i - 5^\circ\text{C}}{30^\circ\text{C}} = \left(\frac{0,5 \cdot t_i - 2,5\text{K}}{47,10\text{K} \cdot \ln \frac{45,29^\circ\text{C} - t_i}{47,79^\circ\text{C} - 1,5 \cdot t_i}} \right)^{1,3}$$

$$t_i = 5^\circ\text{C} + 30\text{K} \cdot \left(\frac{0,5 \cdot t_i - 2,5\text{K}}{47,10\text{K} \cdot \ln \frac{45,29^\circ\text{C} - t_i}{47,79^\circ\text{C} - 1,5 \cdot t_i}} \right)^{1,3}$$

Durch Iteration erhält man für $t_i = 17,69^\circ\text{C}$

Berechnung der Raumtemperatur für $t_{iA} = 24 \text{ °C}$ und der ermittelten Vorlauf-temperatur von $45,29 \text{ °C}$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{t_i - 5 \text{ °C}}{24 \text{ °C} - (-15) \text{ °C}} = \frac{t_i - 5 \text{ °C}}{39 \text{ °C}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{45,29 \text{ °C} - t_R}{(70 - 55) \text{ K}} = \frac{45,29 \text{ °C} - t_R}{15 \text{ K}}$$

$$t_R = 45,29 \text{ °C} - \frac{15 \text{ K} \cdot (t_i - 5 \text{ °C})}{39 \text{ °C}}$$

$$t_R = 47,21 \text{ °C} - 0,3846 \cdot t_i$$

$$\Delta t_{mA} = \frac{t_{VA} - t_{RA}}{\ln \frac{t_{VA} - t_{iA}}{t_{RA} - t_{iA}}} = \frac{70 \text{ °C} - 55 \text{ °C}}{\ln \frac{70 \text{ °C} - 24 \text{ °C}}{55 \text{ °C} - 24 \text{ °C}}} = 38,01 \text{ K}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{t_i - 5 \text{ °C}}{39 \text{ °C}} = \left(\frac{45,29 \text{ °C} - (47,21 \text{ °C} - 0,3846 \cdot t_i)}{\ln \frac{45,29 \text{ °C} - t_i}{47,21 \text{ °C} - 0,3846 \cdot t_i - t_i}} \right)^{1,3}$$

$$\frac{t_i - 5 \text{ °C}}{39 \text{ °C}} = \left(\frac{0,3846 \cdot t_i - 1,92 \text{ K}}{38,01 \text{ K} \cdot \ln \frac{45,29 \text{ °C} - t_i}{47,21 \text{ °C} - 1,3846 \cdot t_i}} \right)^{1,3}$$

$$t_i = 5 \text{ °C} + 39 \text{ K} \cdot \left(\frac{0,3846 \cdot t_i - 1,92 \text{ K}}{38,01 \text{ K} \cdot \ln \frac{45,29 \text{ °C} - t_i}{47,21 \text{ °C} - 1,3846 \cdot t_i}} \right)^{1,3}$$

Durch Iteration erhält man für $t_i = 21,89 \text{ °C}$

Lösung b) Außentemperatur, für die im Raum 2 gerade 23°C herrschen.

Anhaltswerte für t_a (Schätzung)

$$\begin{aligned} t_a &= -15 \text{ °C} & t_i &= 24 \text{ °C} \\ t_a &= +5 \text{ °C} & t_i &= 21,9 \text{ °C} \quad (\text{aus a}) \end{aligned}$$

Bei Annahme einer linearen Anhängigkeit ergibt sich eine Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 24 &= -a \cdot 15 + b \\ 21,9 &= +a \cdot 5 + b \\ \hline 2,1 &= -a \cdot 20 \end{aligned}$$

Lösungen für a und b:

$$\begin{aligned} a &= -0,105 \\ b &= 22,43 \end{aligned}$$

Folgende Gleichungen gelten also:

$$\begin{aligned} t_i &= -0,105 \cdot t_a + 22,43 \text{ °C} \\ t_a &= 213,6 \text{ °C} - 9,52 \cdot t_i \end{aligned}$$

$t_i = 23 \text{ °C}$ ergibt sich etwa bei $t_a \approx -5,45 \text{ °C}$. Gerechnet wird mit $t_a = -5,5 \text{ °C}$

Ermittlung der Vorlauftemperatur (bei der im Wohnzimmer gerade 20°C herrschen) bei $t_a = -5,5 \text{ °C}$.

Belastung:

$$\textcircled{3} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{20 \text{ °C} + 5,5 \text{ °C}}{20 \text{ °C} + 15 \text{ °C}} = 0,7286$$

Heizkurvengleichung für Vorlauftemperatur:

$$t_V = t_i - \varphi \cdot \Delta t_A \cdot \frac{e^{\frac{\Delta t_A}{\Delta t_{mA}} \cdot \varphi^{n-1}}}{1 - e^{\frac{\Delta t_A}{\Delta t_{mA}} \cdot \varphi^{n-1}}} = 20 \text{ °C} - 0,7286 \cdot 15 \text{ K} \cdot \frac{e^{\frac{15 \text{ K}}{42,06 \text{ K}} \cdot 0,7286^{1,3}}}{1 - e^{\frac{15 \text{ K}}{42,06 \text{ K}} \cdot 0,7286^{1,3}}}}$$

$$t_V = 58,73 \text{ °C}$$

Rücklauftemperatur:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{58,73 \text{ °C} - t_R}{70 \text{ °C} - 55 \text{ °C}} = \frac{23 \text{ °C} + 5,5 \text{ °C}}{24 \text{ °C} + 15 \text{ °C}} = 0,731$$
$$\begin{aligned} t_R &= 47,77 \text{ °C} \\ t_V - t_R &= 10,96 \text{ K} \end{aligned}$$

Es müsste im Raum 2 sein:

$$\textcircled{2} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = 0,731 = \left(\frac{10,96 \text{ K}}{\ln \frac{58,73^\circ\text{C} - 23^\circ\text{C}}{47,77^\circ\text{C} - 23^\circ\text{C}}} \right)^{1,3} \approx 0,732$$

Übereinstimmung ist da! Auch für den Raum 2 wird die Belastung von 0,73 (bei $t_a = -5,5^\circ\text{C}$) erreicht.

Für den Raum mit $t_{iA} = 24^\circ\text{C}$ gilt genau:

$$\textcircled{3} \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_A} = \frac{23^\circ\text{C} + 5,5^\circ\text{C}}{24^\circ\text{C} + 15^\circ\text{C}} = 0,731$$